

# Die Beeinflussung der positiven Säule durch ein magnetisches Querfeld<sup>1</sup>

Von THEODOR WASSERRAB

(Z. Naturforschg. 2a, 575—582 [1947]; eingegangen am 17. Januar 1947)

In der Einleitung werden Formeln über die Magnetfeld-Abhängigkeit des Diffusions-Koeffizienten zusammengestellt, und zwar sowohl für homogene Trägergeschwindigkeiten (J. S. Townsend) als auch Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung (L. Tonks und A. W. Allis). Damit wird, aufbauend auf der Schottkyschen Diffusionstheorie, die Wirkung eines magnetischen Transversalfeldes auf die positive Säule einer Niederdruck-Bogenentladung untersucht. Für die Trägerdichte-Verteilung einer „ebenen“ Entladung erhält man eine Differentialgleichung vom Typus einer homogenen Schwingungsgleichung, welche die mit steigender Magnetfeldstärke zunehmende Unsymmetrie und die seitliche Verschiebung des Entladungs-Maximums beschreibt. Damit ist ein vollständiges Bild der transversalen Magnetfeld-Beeinflussung gewonnen, welches auch die bisher bekannten Teilkenntnisse enthält. Die Richtigkeit der theoretischen Untersuchung wurde experimentell geprüft. Dazu wurde die Helligkeitsverteilung über den Querschnitt einer „ebenen“ Quecksilberdampf-Entladung bei Sattdampfdruck bei  $10^{-3}$  und  $10^{-2}$  Torr mit Hilfe von Photozelle und Elektrometer gemessen. Die Messung ergab bei  $10^{-3}$  Torr, einer mittleren Entladungsstromdichte von  $0,133 \text{ A/cm}^2$  und Magnetfeldstärken bis  $10 \text{ A/cm}$  befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie. Bei höheren Dampfdrucken und stärkeren Magnetfeldern wurden die Messungen durch Störeffekte (Streulicht, Schichtenbildung) beeinträchtigt.

Im Anhang wird kurz über ein analoges zylindersymmetrisches Problem berichtet: nach einem Vorgang von L. Tonks wird die Wirkung des magnetischen Eigenfeldes einer Diffusionssäule berechnet.

## 1. Die Magnetfeld-Abhängigkeit des Diffusions-Koeffizienten

Wenn man die auf einen Ladungsträger wirkende magnetische und elektrische Kraft vergleicht, erhält man mit  $v = bE$  ( $b [\text{cm}^2/\text{Vs}]$ .. Beweglichkeit,  $v [\text{cm/s}]$ .. Geschwindigkeit,  $E [\text{V/cm}]$ .. el. Feldstärke,  $H [\text{A/cm}]$ .. magn. Feldstärke,  $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-8} [\text{Vs/A cm}]$ .. Induktionskonstante,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} [\text{As}]$ .. Elementarladung) eine dimensionslose Kennzahl:

$$\frac{e\mu_0 Hv}{e E} = \mu_0 H b = h, \quad (1,1)$$

die im folgenden als „Transformations-Koeffizient“ zwischen elektrischen und magnetischen Kräften, Stromdichten usw. in alle Bewegungs- und Strömungsgleichungen eingehen wird. Durch  $h = 1$  wird eine „kritische Magnetfeldstärke“  $H_K$  definiert, deren Kraftwirkung der des elektrischen Längsfeldes  $E$  entspricht. Um eine orientierende Übersicht über die Größenordnung der erforderlichen Magnetfeldstärken zu erhalten, ist in Abb. 1

$H_K = H/h$  für verschiedene Elektronen-Temperaturen ( $U[V]$ .. Voltäquivalent der TrägerTemperatur) in Abhängigkeit vom Dampfdruck für Quecksilberdampf dargestellt.

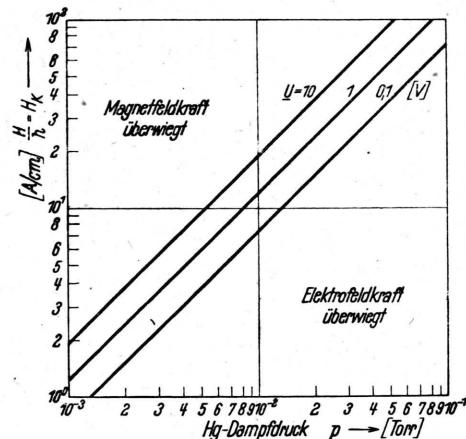


Abb. 1. „Kritische“ Magnetfeldstärke  $H_K$  in Abhängigkeit vom Quecksilberdampfdruck  $p$  für verschiedene, durch die Elektronentemperatur  $U$  gekennzeichnete Entladungen.

Ein elektrisches Feld  $E_y$  erzeugt in einem Plasma mit der unipolaren Trägerdichte  $N$  einen Trägerstrom der Dichte:

<sup>1</sup> Gekürzte Wiedergabe einer größeren Arbeit über: „Die Beeinflussung elektrischer Entladungen durch magnetische Felder“. Adr. d. Verf.: (16) Lampertheim, i. Fa. Brown-Boveri & Cie.

$$i_{y_0} = e N b_- E_y. \quad (1,2)$$

Wenn außerdem ein Magnetfeld (senkrecht zur Richtung des elektrischen Feldes  $H = H_z$ ) wirksam ist, so wird ein zu den beiden Feldrichtungen senkrechter Trägerstrom der Dichte:

$$|i_x| = |i_{y_0}| h$$

hervorgerufen, welcher wiederum einen Strom:

$$|i_{y_1}| = |i_{y_0}| h^2$$

zur Folge hat und so fort, so daß die Gesamtstromdichte in der  $y$ -Richtung

$$i_y = e N b_- E_y [1 - h^2 + h^4 - h^6 + \dots] = e N b_H E_y \quad (1,3)$$

und in der  $x$ -Richtung

$$i_x = e N b_- E_y [h - h^3 + h^5 - h^7 + \dots] = e N b_H E_y h \quad (1,4)$$

beträgt; dabei wird

$$b_H = b_- [1 - h^2 + h^4 - h^6 + \dots] = b_- [1 + h^2]^{-1} \quad (1,5)$$

gesetzt.

In gleicher Weise erhält man für den Diffusions-Koeffizienten<sup>2,3</sup>

$$D_H = D [1 + h^2]^{-1}. \quad (1,6)$$

Diese elementare Ableitung gilt nur für einheitliche Trägergeschwindigkeit.

L. Tonks und P. W. Allis<sup>4</sup> haben die Trägerströmung für eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung exakt (auch für starke Magnetfelder gültig) berechnet; für den allgemeinen Fall, daß in  $x$ - und  $y$ -Richtung sowohl ein elektrisches Feld als auch ein Trägerdichte-Gefälle besteht, lauten die Gleichungen für die Strömungsdichten:

$$n_y = D_{Hy} \left[ N \frac{E_y}{U} - \frac{\partial N}{\partial y} \right] + D_{Hx} \left[ N \frac{E_x}{U} - \frac{\partial N}{\partial x} \right], \quad (1,7)$$

$$n_x = D_{Hy} \left[ N \frac{E_x}{U} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] - D_{Hx} \left[ N \frac{E_y}{U} - \frac{\partial N}{\partial y} \right] \quad (1,8)$$

<sup>2</sup> J. S. Townsend, Philos. Mag. J. Sci. **25**, 459 [1938].

<sup>3</sup> L. Tonks, Physic. Rev. **51**, 744 [1937].

<sup>4</sup> L. Tonks u. W. P. Allis, Physic. Rev. **52**, 710 [1937].

<sup>5</sup> E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln [1933] S. 78.

mit

$$D_{Hy} = D \alpha, \quad (1,9)$$

$$\text{wo } \alpha = [1 - h^2 - h^4 e^{h^2} E i(-h^2)],$$

$$D_{Hx} = D \beta, \quad (1,10)$$

$$\text{wo } \beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} h [1 - 2 h^2 - 2 \sqrt{\pi} h^3 e^{h^2} \{1 - \Phi(h)\}];$$

$$E i(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \dots \quad \text{Exponentialintegral}^5$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \dots \quad \text{Gaußsche Fehlerfunktion}^5.$$

Sie haben auch festgestellt, daß die in den „Gasentladungstabellen“<sup>6</sup> Seite 51 angegebenen Formeln für die relative Trägergeschwindigkeit falsch sind. Für den praktischen Gebrauch sind diese exakten Ausdrücke für  $D_{Hx}$  und  $D_{Hy}$  unbequem. Man erhält jedoch eine einfachere Schreibweise, wenn man den für homogene Trägergeschwindigkeiten ermittelten Zusammenhang (1,6) verwendet, zu welchem folgende Beziehung besteht:

$$D_{Hy} = f_\alpha \frac{D}{1 + h^2} = f_\alpha D_H, \quad (1,11)$$

$$D_{Hx} = f_\beta \frac{D}{1 + h^2} h = f_\beta D_H h. \quad (1,12)$$

Es ist dabei von Bedeutung, daß die Korrekturfaktoren im gesamten Bereich  $0 < h < \infty$  nur Werte in den Bereichen:  $0,99 < f_\alpha < 1,58$  bzw.  $0,91 < f_\beta < 1,18$  annehmen.

In Abb. 2 ist die durch (1,6) (1,11) (1,12) bestimmte Magnetfeldabhängigkeit graphisch dargestellt; man erkennt, daß die Näherungsformel (1,6) den Verlauf der exakten Beziehungen (1,11) (1,12) recht gut wiedergibt und daß man alle qualitativen Berechnungen auf der einfachen Formel (1,6) aufbauen kann. Auch für die meisten quantitativen Untersuchungen wird die geringfügige Abweichung keine Bedeutung besitzen.

Man kann die Gln. (1,7) (1,8) auch schreiben:

$$\dot{y} = D_{Hy} \left[ \frac{E_y}{U} - \frac{\partial N/\partial y}{N} \right] + D_{Hx} \left[ \frac{E_x}{U} - \frac{\partial N/\partial x}{N} \right],$$

$$\dot{x} = D_{Hy} \left[ \frac{E_x}{U} - \frac{\partial N/\partial x}{N} \right] - D_{Hx} \left[ \frac{E_y}{U} - \frac{\partial N/\partial y}{N} \right],$$

<sup>6</sup> M. Knoll, F. Ollendorff u. R. Rompe, Gasentladungstabellen, Berlin 1935.

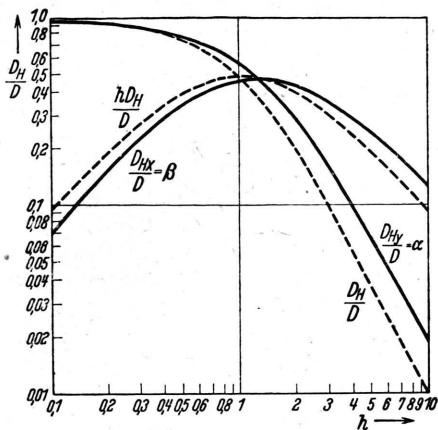


Abb. 2. Magnetfeldbeeinflussung des Diffusionskoeffizienten ( $E = E_y$ ;  $H = H_z$ )  $D_H/D$ : Gl. (1, 6);  $D_{Hy}/D$ : Gl. (1, 11);  $D_{Hx}/D$ : Gl. (1, 12).

wobei die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke die Ableitungen einer sogenannten „Boltzmannschen Geschwindigkeits-Potentialfunktion“:—( $V/U + \ln N$ ) darstellen. Damit ist der Anschluß an die in den erwähnten amerikanischen Arbeiten<sup>3,7</sup> verwendete Schreibweise gegeben.

## 2. Die Theorie der ebenen Diffusions säule mit transversaler Magnetfeld Beeinflussung

Indem man von der Townsend-Beziehung  $D/b = U$  Gebrauch macht, erhält man für die Trägerströmungsdichten von Elektronen- und Ionenströmen in Erweiterung des Schottkyschen Ansatzes<sup>8</sup> durch Berücksichtigung des magnetischen Feldanteiles ( $H = H_z$ ) das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} n_{+x} &= -D_{+H} \frac{\partial N}{\partial x} + b_{+H} E_x N - h_+ b_{+H} E_y N, \\ n_{-x} &= -D_{-H} \frac{\partial N}{\partial x} - b_{-H} E_x N - h_- b_{-H} E_y N, \\ n_{+y} &= +b_{+H} E_y N + h_+ \left[ +b_{+H} E_x N - D_{+H} \frac{\partial N}{\partial x} \right], \\ n_{-y} &= -b_{-H} E_y N - h_- \left[ -b_{-H} E_x N - D_{-H} \frac{\partial N}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (2, 1)$$

Da sowohl die Ladung als auch die Bewegungsrichtung bei Ionen und Elektronen entgegengesetzt sind, ergibt sich für beide Ladungsträger-

<sup>7</sup> L. Tonks, Physic. Rev. 56, 360 [1939]

<sup>8</sup> W. Schottky, Physik. Z. 25, 342, 635 [1924].

arten eine Magnetfeldkraft in *gleicher* Richtung. Dabei ist, aus der Quasi-Neutralitätsbedingung folgend, die Trägerdichte der positiven und negativen Teilchen gleich. Aus der Randbedingung, daß an der isolierenden Wandung die resultierende, gerichtete Wandströmungsdichte verschwinden muß ( $x = 0, x = d: n_x = n_{+x} - n_{-x} = 0$ ), folgt, daß die Trägerströmungsdichten  $n_+$  und  $n_-$  einander gleich sind. Damit kann man für die gerichtete Trägerströmung von der Gefäßmitte auf die Wandung zu unter Verwendung des „Koeffizienten der ambipolaren Diffusion bei Magnetfeldwirkung“

$$D_{aH} = \frac{D_{+H} b_{-H} + D_{-H} b_{+H}}{b_{+H} + b_{-H}} \quad (2, 2)$$

auch schreiben:

$$n_{\pm x} = -D_{aH} \frac{\partial N}{\partial x} - h_{\pm} b_{\pm} - \frac{D_{aH}}{D_a} E_y N \quad (2, 3)$$

( $h_{\pm} = \mu_0 H b_{\pm}$ ). Da in einer stationären Entladung die Änderung der gerichteten Wandströmung

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_{+x}) = -D_{aH} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - h_+ b_+ - \frac{D_{aH}}{D_a} E_y \frac{\partial N}{\partial x}$$

gleich der Trägererzeugung in dem betrachteten Volumelement sein muß

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_x) = \frac{1}{\tau} N \quad (2, 4)$$

( $\tau^{-1}$  bedeutet Zahl der von einem Ladungsträger je Sekunde neu erzeugten Träger), erhält man nun unter Gleichsetzung

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + h_{\pm} b_{\pm} - \frac{1}{D_a} E_y \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{1}{\tau D_{aH}} N = 0 \quad (2, 5)$$

die Differentialgleichung für die Trägerdichte einer Diffusionssäule bei Berücksichtigung eines magnetischen Fremdfeldes. In der obigen Ableitung wurde angenommen, daß das magnetische Fremdfeld senkrecht zur Achse der Entladung, die zwischen zwei parallelen Ebenen brennt, wirkt. Die Differentialgleichung, die man mit den Abkürzungen

$$a = h_{\pm} b_{\pm} - \frac{1}{D_a} E_y \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\tau D_{aH}}$$

nunmehr

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + a \frac{\partial N}{\partial x} + b N = 0 \quad (2, 6)$$

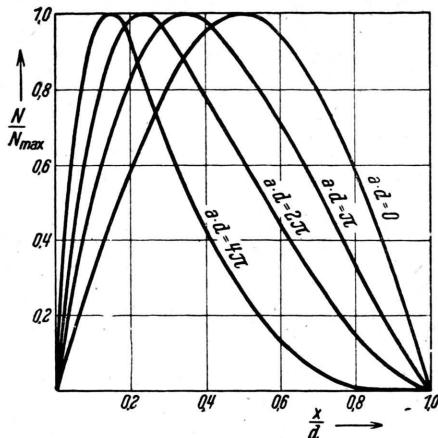


Abb. 3. Der Verlauf der Ladungsträgerdichte in einer stationären elektr. Niederdruck-Gasentladung bei Einwirkung eines homogenen transversalen Magnetfeldes.

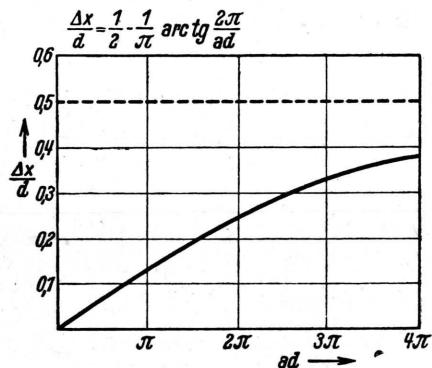


Abb. 4. Verschiebung des Trägerdichtemaximums aus der Symmetrieebene  $\Delta x$ , bezogen auf den Wandabstand  $d$ , in Abhängigkeit von der äußeren Magnetfeldstärke:  
 $a d = \mu_0 H d b_+ + b_- \mathfrak{E}_y / D a$

schreiben kann, stellt eine *homogene Schwingungsgleichung* dar, wobei im vorliegenden Falle nur die Verhältnisse bei

$$a^2 < 4b$$

erörtert werden sollen, denen periodische Lösungen entsprechen. Die Lösung des bisher allein erörterten Falles

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + b N = 0,$$

welcher die Trägerverteilung bei fehlendem Fremdfeld einfluß beschreibt, mit den Grenzbedingungen

$$x=0: \quad N=0,$$

$$x=d: \quad N=0,$$

$$x=d/2: \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

wonach in den begrenzenden Ebenen die Trägerdichte verschwinden soll, lautet

$$N = N_{\max} \sin \pi x/d,$$

wobei der Eigenwert  $b = \pi^2/d^2$  ist.

Der Ort höchster Trägerdichte  $N_{\max}$  befindet sich dabei in der Mitte zwischen den beiden die Entladung begrenzenden Ebenen.

Die Lösung der Differentialgleichung (2,6) unter Berücksichtigung des äußeren Magnetfeldes lautet:

$$N = A e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2 x}{d}} \sin [V b - a^2/4 (x - B)]. \quad (2,7)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  findet man aus den Grenzbedingungen:

$$x=0: \quad N=0, B=0,$$

$$x=d: \quad N=0, \pi = V b - a^2/4 d,$$

$$x = \frac{d}{\pi} \operatorname{arc tg} \frac{2\pi}{ad}: \frac{\partial N}{\partial x} = 0, N = N_{\max},$$

$$A = N_{\max} \frac{e^{\frac{a^2 d}{2\pi} \operatorname{arc tg} \frac{2\pi}{ad}}}{\sin \left( \operatorname{arc tg} \frac{2\pi}{ad} \right)},$$

und man erhält für den Trägerdichteverlauf

$$\frac{N}{N_{\max}} = e^{\frac{a^2 d}{2\pi} \left( \operatorname{arc tg} \frac{2\pi}{ad} - \frac{\pi x}{d} \right)} \frac{\sin (\pi x/d)}{\sin \left( \operatorname{arc tg} \frac{2\pi}{ad} \right)}. \quad (2,8)$$

Dieses Ergebnis ist in Abb. 3 für verschiedene magnetische Feldstärken  $H$  in bezogenen Maßstäben graphisch dargestellt. Man erkennt, daß mit zunehmender äußerer Magnetfeldstärke die Entladung immer stärker an eine der Begrenzungsf lächen gedrängt wird. Für die Verschiebung des Trägerdichte-Maximums ergibt sich dabei, bezogen auf den Abstand der beiden Begrenzungsebenen  $d$ ,

$$\frac{\Delta x}{d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc tg} \frac{2\pi}{ad}. \quad (2,9)$$

Bis  $ad = 4\pi$  sind die zugehörigen Werte von  $\Delta x/d$  in Abb. 4 graphisch dargestellt. Unter Vernachlässigung der Kreisfunktion erhält man

$$\frac{d}{dx} \left( \ln \frac{N}{N_{\max}} \right) = -\frac{a}{2},$$

d. h. die Trägerdichte nimmt in einem Abstand vom Maximum  $N_{\max}$  exponentiell ab. Diese Tatsache

ist schon 1928 von T. J. Killian experimentell ermittelt und von L. Tonks<sup>7</sup> nachgerechnet und veröffentlicht worden. Die vorliegende Arbeit gibt eine exakte Beschreibung der gesamten Trägerverteilung und liefert weitere Ergebnisse, wie z.B. die Maximum-Verschiebung in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke.

### 3. Meßverfahren und Meßergebnisse<sup>8</sup>

Um die Ergebnisse der obigen Theorie nachprüfen zu können, habe ich die Helligkeitsverteilung einer zwischen zwei parallelen, isolierenden Begrenzungsflächen brennenden Niederdruckentladung ermittelt. Es wurde dabei angenommen, daß bei konstantem Entladungsstrom die Helligkeit ein Maß für die Trägerdichte darstellt, da in dem zu untersuchenden Druck- und Stromdichtebereich  $N_a \sim N$  gilt und noch keine Termsättigung zu erwarten ist. Die Richtigkeit dieser Annahme konnte durch Messung gut bestätigt werden.

Das in Abb. 5 dargestellte Entladungsgefäß besaß zwischen Oxydkathode 1 und Anode 2 zwei parallele Glasplatten 3 (Länge 180 mm, Breite 76 mm, gegenseitiger Abstand 20 mm). Eine Entladung hat dann zwischen diesen beiden parallelen Glasplatten in erster Näherung einen Verlauf wie zwischen zwei unendlich langen parallelen Ebenen. Durch Beobachtung des Anregungsleuchtens wurde die Trägerverteilung und damit der Entladungsvorgang untersucht. Seitlich sind zwei vom Gleichstrom  $I_m$  durchflossene kreisrunde Helmholtz-Spulen 4 angeordnet, deren gegenüberlicher Abstand  $R$  und deren Durchmesser  $2R$  beträgt, so daß in der Mitte des ebenen Entladungsraumes ein annähernd homogenes Magnetfeld (Abweichungen < 3%)<sup>10</sup> mit der Horizontal-Feldstärke

$$H_z = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{I_m}{R} [\text{A/cm}] \quad (3,1)$$

herrscht. Das in der Mitte der parallelen Platten befindliche Gebiet wurde mit Hilfe einer Sammellinse 5 auf eine mit einem schmalen Spalt 6 (0,5 mm breit) versehene Fläche abgebildet und mittels einer Photozelle 7 auf seine Helligkeitsverteilung untersucht. Der Photozellenstrom lud über einen Widerstand einen Kondensator, dessen Spannung mit Hilfe eines Elektrometers bestimmt wurde. Es wurde jedesmal diejenige Zeit gestoppt, die die bewegliche Saite des Saitenelektrometers für die Auswanderung um 10 Skalenteile benötigte.

<sup>7</sup> Die Messungen hat der Verfasser im Herbst 1942 im Physik. Labor. des Stromrichterwerkes der Siemens-Schuckertwerke, Berlin-Siemensstadt, durchgeführt. Herrn Dr. M. Steenbeck sei auch an dieser Stelle für die Überlassung der Labormittel und für zahlreiche Diskussionen herzlichst gedankt.

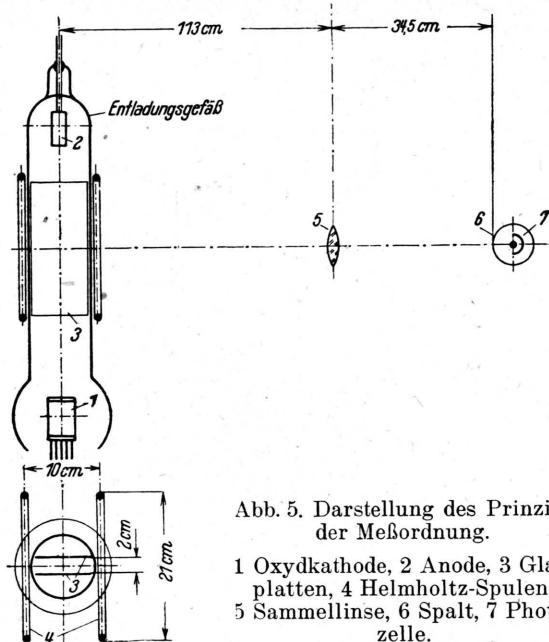


Abb. 5. Darstellung des Prinzips der Meßordnung.

1 Oxydkathode, 2 Anode, 3 Glasplatten, 4 Helmholtz-Spulen, 5 Sammellinse, 6 Spalt, 7 Photozelle.

Um definierte Dampfdruckverhältnisse zu erhalten und im zu untersuchenden ebenen Entladungsraum Kondensation sicher zu vermeiden, wurde das Entladungsgefäß in einen geräumigen Ofen gebracht, durch dessen Boden ein enger Rohrstützen des Gefäßes in ein mit Kupferspänen gefülltes und mit einer Heizwicklung versehenes Becherglas ragte. In diesem Rohrstützen befand sich ein Tropfen Quecksilber, dessen Temperatur den Dampfdruck in der Röhre bestimmte. Die Temperatur des Bodenquecksilbers und der Gefäßwandung im Heizofen wurde mittels zweier Thermoelemente dauernd überwacht. Die Wicklungen der Helmholtz-Spulen bestanden aus je 20 Windungen Asbest-Draht. Die seitliche Verschiebung der Photozelle, die auf einer optischen Bank angebracht war, erfolgte mittels Mikrometerschraube. Der Plattenabstand von 20 mm wurde in der Spaltebene auf 6,1 mm abgebildet und diese Strecke in Abständen von je 0,25 mm nach ihren Helligkeitswerten ausgemessen. Während der Messungen wurde das nach den bekannten Methoden der Hochvakuumtechnik ausgeheizte Rohr dauernd gepumpt, um auch kleinste Fremdgaseinflüsse sicher zu vermeiden.

Von einer Messung der Trägerdichteverteilung mit Hilfe einer beweglichen Sonde wurde Abstand genommen, da ja die Sondenströme unter der Wirkung des Magnetfeldes gleichfalls verändert werden<sup>11</sup>.

Die Messungen wurden bei Temperaturen vorgenommen, die einem Quecksilbersattdampf von

<sup>10</sup> G. Mie, Elektrodynamik, in Handbuch der Experimental-Physik Bd. 11/1, S. 35.

<sup>11</sup> G. Spiwak u. E. Reichrude, Techn. Physics USSR 5, 715 [1938].

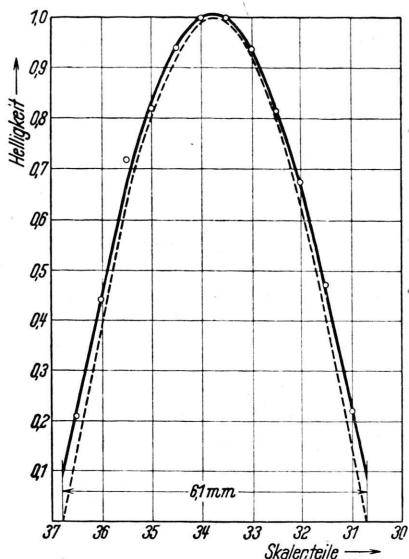


Abb. 6. Helligkeits- bzw. Trägerdichteverteilung einer zwischen zwei parallelen Ebenen brennenden Säule ohne Magnetfeldbeeinflussung. (Der Bildbreite 6,1 mm entspricht der Plattenabstand 20 mm.) Entladungsstromstärke:  $I_A = 2 \text{ [A]}$ , Quecksilbertemperatur:  $T_{Hg} = 20^\circ \text{C}$ . (--- berechnet, — gemessen)

20 bzw.  $50^\circ \text{C}$  entsprachen. Die Messungen bei  $20^\circ \text{C}$  habe ich insbesondere deshalb angestellt, um den Gültigkeitsbereich der Theorie zu ermitteln, da in diesem Falle die freie Weglänge nicht mehr klein gegen den Wandabstand ist; außerdem überwiegen bei niedrigen Gasdrucken schon bei geringen Magnetspulenströmen die magnetischen Feldkräfte gegenüber der Beeinflussung durch das elektrische Längsfeld:  $h > 1$ . Um die Brauchbarkeit des Meßverfahrens zu prüfen, habe ich zuerst die Helligkeitsverteilung einer ebenen Entladung ohne magnetisches Querfeld gemessen. Das in Abb. 6 eingetragene Ergebnis einer solchen Messung ohne Magnetfeld zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit der errechneten sinusförmigen Trägerdichteverteilung über den Entladungsquerschnitt. Dieses Meßergebnis ist um so bemerkenswerter, als die Beobachtung mit bloßem Auge eine über fast den ganzen Querschnitt gleichmäßige Helligkeit ergeben hatte; nur die unmittelbar an die Wandung grenzenden Gebiete hatten geringeres Leuchten gezeigt. Auch bei geringen Magnetfeldstärken wurde die Rechnung durch die Messung recht gut bestätigt (Abb. 7) und somit der Nachweis für die Anwendbarkeit obiger Theorie auch bei verhältnismäßig kleinen Drucken erbracht.

Bei großen Magnetfeldstärken (z. B.  $H > 10 \text{ [A/cm]}$ , bei  $T = 20^\circ \text{C}$ ) wurde die Entladung verhältnismäßig stark gegen die eine Wandung gedrückt und damit die Stromdichte örtlich stark erhöht. Als Folge ergab sich Schichtbildung in der positiven Säule, wodurch die Messung beeinträchtigt wurde.

Während sich bei niedrigem Druck ( $10^{-3} \text{ Torr}$ ) gute Übereinstimmung (Unterschied  $\approx 10\%$ ) ergab, beträgt bei höherem Druck ( $10^{-2} \text{ Torr}$ ) die Abweichung etwa 27%. Dies ist offenbar mit im Meßverfahren begründet, das mit zunehmendem Druck größere Helligkeiten registrieren muß, wobei die Randeffekte durch Streulicht stärker sind als bei niedrigeren Drucken.

Das Meßverfahren ist sehr geeignet, um den Trägerdichteverlauf zu ermitteln; für die Nachprüfung des Zusammenhangs zwischen seitlicher Maximum-Verschiebung und Magnetfeldstärke ist die benutzte Meßmethode jedoch wenig geeignet, da die Ermittlung der seitlichen Verschiebung nur mühsam und ungenau gelingt. Dafür müßte ein schreibendes Instrument eingesetzt werden; aus der Differentiation der damit erhaltenen Helligkeitskurve könnte dann die Maximum-Verschiebung sehr genau ermittelt werden.

Bei der Auswertung der Ergebnisse ist zu beachten, daß infolge der endlichen Spaltbreite die Elektrometerwerte den Integralwert über den durch den Spalt der Photozelle hindurchströmenden Lichtstrom angeben. Um die Werte bei einem unendlich schmalen Spalt zu ermitteln, bedient man

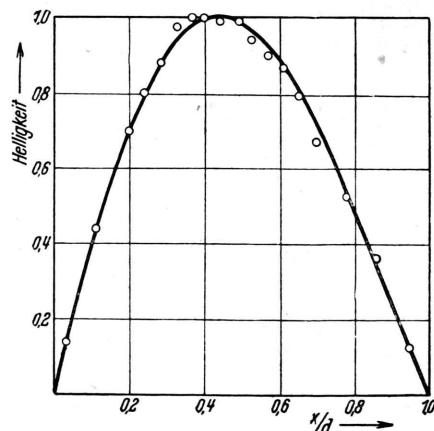


Abb. 7. Helligkeits- bzw. Trägerdichteverteilung einer „ebenen“ Entladung bei Einwirkung eines homogenen transversalen Magnetfeldes.  $\Delta x/d = 0.06$ ;  $I_A = 2 \text{ [A]}$ ;  $I_{\text{Magn}} = 2.5 \text{ [A]}$ ;  $T_{Hg} = 22^\circ \text{C}$ . (○ gemessene Werte, — berechnete Werte)

Elektronen-Temperatur	$T_-$	3870	7730	11600	15500	23200	38700	77300	[°K]
Elektronen-weglängen	$\lambda_{-0}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-3}$	[cm]

Tab. 1. Mittlere freie Elektronenweglängen als Funktion der Elektronentemperatur für Quecksilberdampf bei 1 Torr und 0 °C.<sup>13</sup>

sich vorteilhaft einer von R. Rüdenberg<sup>12</sup> angegebenen Formel

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{d^2}{24} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad (3, 2)$$

wobei  $\varphi(x)$  den wahren Kurvenverlauf und  $f(x)$  den gemessenen Kurvenverlauf bei Spaltbreite  $d$  bezeichnet. Um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten, mußten wir die Temperaturwerte möglichst konstant halten, was dadurch erreicht wurde, daß die Heizvorrichtungen vor der Messung genügend lange eingeschaltet wurden. Bei der Auswertung wurden die freien Weglängen der Elektronen nicht mit ihren gaskinetischen, sondern mit dem durch die Geschwindigkeit gegebenen Wirkungsquerschnitt eingesetzt.

Die angegebenen Zahlenwerte konnte der Verfasser in die Beziehung zusammenfassen:

$$\lambda_{-0} \approx 2,2 \cdot 10^{-3} \cdot U_{-}^{0,7} = 2,41 \cdot 10^{-7} T_{-}^{0,7} [\text{cm}]. \quad (3, 3)$$

Die Messung der Änderung der Längsfeldstärke  $\Delta E$  [V/cm] bei konstantem Strom in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $H$  [A/cm] ergab eine lineare Beziehung:

$$\Delta E = 6,2 \cdot 10^{-3} H \quad \text{bei } T_{Hg} = 22^\circ \text{C}, I_A = 2 [\text{A}].$$

Die Längsfeldstärke betrug ohne Magnetfeld etwa 0,505 [V/cm].

Die obige Untersuchung hatte zum Ziel, die Trägerbewegung im elektrischen Längsfeld und magnetischen Querfeld mathematisch möglichst einfach zu beschreiben und das Ergebnis durch Messung zu prüfen. Zu diesem Zwecke wurde eine „ebene“ Entladung betrachtet, welche die Vorgänge in besonders einfacher und übersichtlicher Weise darzustellen und zu messen gestattet. Im Anschluß an diese mehr prinzipielle Untersuchung soll nun noch kurz über das zylindersymmetrische Problem berichtet werden.

<sup>12</sup> R. Rüdenberg, Elektrotechn. u. Maschinenbau 27, 1031 [1909].

#### 4. Anhang: Die Wirkung des magnetischen Eigenfeldes einer Diffusionssäule

Die Zusammenschnürung des Bogens unter der Wirkung des Eigenmagnetfeldes (Pinch-Effekt) wurde bereits von L. Tonks<sup>14</sup> berechnet und diskutiert. Der folgende Bericht bringt daher im wesentlichen den von Tonks angegebenen Lösungsgang.

Der Verlauf der magnetischen Kraftlinien empfiehlt Behandlung des Problems in Zylinder-Koordinaten.

Aus Wandstromdichte:

$$j_r = -e D_{aH} \frac{\partial N}{\partial r} + e b_+ \frac{D_{aH}}{D_a} G \mu_0 H b_- N \quad (4, 1)$$

und Träger-Neuerzeugung:

$$\operatorname{div} j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) = e N / \tau \quad (4, 2)$$

erhält man die beschreibende Differentialgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N}{\partial r} \right) + \frac{1}{\tau D_{aH}} N - \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H N) = 0, \quad (4, 3)$$

wobei die Abkürzung:  $\alpha = \mu_0 b_- b_+ G / D_a$  verwendet wird. Durch die Substitution

$$f = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi r^2}{\tau D_{aH}} = \frac{r^2}{4\pi D_{aH}} \quad (4, 4)$$

kann (4,3) erheblich vereinfacht werden ( $H$  wird eliminiert!):

$$df = \frac{r}{2\tau D_{aH}} dr \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\tau} \frac{d}{dr} = \frac{1}{2\tau D_{aH}} \frac{d}{df}. \quad (4, 5)$$

Unter  $f$  ist gemäß (4,4) ein Teilquerschnitt (dimensionslos) zu verstehen.  $J$  (dimensionslos) kennzeichnet dann den zu  $f$  gehörigen Strom

<sup>13</sup> Der Verfasser dankt auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. G. Mierdel für die Mitteilung der Tabellenwerte.

<sup>14</sup> L. Tonks, The Electrochem. Soc. 1937, 185.

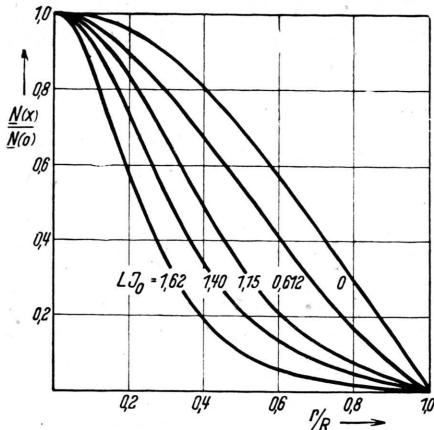


Abb. 8. Relative Elektronendichte (radiale Verteilung) in Abhängigkeit vom Eigenmagnetfeld (nach L. Tonks<sup>7</sup>).

$$\begin{aligned} -2\pi r H &= 2\pi j_0 \int_0^r \frac{N}{N_0} r dr \\ &= 2\pi j_0 \int_0^r \frac{N}{N_0} 2\tau D_{aH} df = 4\pi j_0 \tau D_{aH} J. \\ -r H &= 2j_0 \tau D_{aH} J; \quad N = N_0 dJ/df; \\ r dN/dr &= 2N_0 f d^2J/df^2. \end{aligned}$$

Für den Gesamtquerschnitt gilt:  $r \rightarrow R; f \rightarrow f_0; J \rightarrow J_0$ . Wenn man damit in (4,3) eingeht, erhält man:

$$\frac{d}{df} \left( f \frac{d^2J}{df^2} \right) + \frac{d}{df} (J) + L \frac{d}{df} \left( J \frac{dJ}{df} \right) = 0, \quad (4,5)$$

wobei

$$L = \pi j_0 \tau D_{aH} \quad (4,6)$$

(dimensionslos) ein Maß für die axiale Stromdichte  $j_0$  darstellt.

Gl. (4,5) ist sofort integrierbar:

$$f \frac{d^2J}{df^2} + J \left[ 1 + L \frac{dJ}{df} \right] = 0. \quad (4,7)$$

Die Integrations-Konstante verschwindet. Die weitere Integration wurde von R. Beresford numerisch vorgenommen. Das Ergebnis ist in Abb. 8 dargestellt. Man erkennt deutlich die Zusammenschnürung des Bogens mit wachsender Eigenmagnetfeldstärke. Diesen Effekt hat H. Fetz<sup>15</sup> auch durch Sondenmessungen feststellen können. Die mittlere Trägerdichte  $N$  erhält man zu

$$\begin{aligned} \bar{N} R^2 \pi &= \int_0^R \frac{N}{N_0} \cdot N_0 2\pi r dr \\ &= 4\pi N_0 \tau D_{aH} J_0 = N_0 J_0 \pi R^2 / f_0, \end{aligned} \quad (4,8)$$

<sup>15</sup> H. Fetz, Ann. Physik (5) 40, 579 [1941].

wenn man die obigen Substitutionen (4,4)

$$f/r^2 = \frac{1}{4\tau D_{aH}} \text{ bzw. } f_0/R^2 = \frac{1}{4\tau D_{aH}} \quad (4,4')$$

verwendet.

Damit ergibt sich für den Bogenstrom  $I$ :

$$I = R^2 \pi e \bar{N} b_- G = R^2 \pi e b_- G N_0 J_0 / f_0,$$

oder, wenn man  $N_0$  mit Hilfe von  $L$  (4,6) eliminiert:

$$L = \frac{b_+ b_- \mu_0 G}{D_a} j_0 \frac{1}{4} \frac{R^2}{f_0} = \frac{b_+ b_- \mu_0 G}{4 D_a} e N_0 b_- G \frac{R^2}{f_0}, \quad (4,9)$$

$$I = \frac{4\pi D_a}{b_+ b_- \mu_0 G} J_0 L, \quad (4,10)$$

bzw. für die Maximalträgerdichte

$$N_0 = \frac{4 D_a}{b_+ b_- \mu_0 G e b_- G R^2} L f_0. \quad (4,11)$$

Diese Ausdrücke können umgeformt werden:

$$I \approx 10^9 \frac{U_-^2}{D_- G} J_0 L = 3 \cdot 10^{-5} \frac{T_-^{3/2}}{\lambda_- G} J_0 L \dots [\text{A}]$$

und

$$N_0 = 2 \cdot 10^{27} \frac{U_-^3}{D_-^2 G^2 R^2} L f_0 \dots [\text{cm}^{-3}]. \quad (4,13)$$

Eine nähere Untersuchung von (4,7) zeigt, daß für  $L J_0 = 2$  die Funktion von  $L f_0$  gegen  $\infty$  geht. Der Wert  $L J_0 = 2$  stellt demnach die obere Grenze dar, insbesondere weil schon mit  $N_\pm \leq N_{\text{neutral}}$  eine Grenze gesetzt ist, da höhere Ionisationen unmöglich sind. (Bei Annäherung an die max. Ionisierung steigt der Längsgradient!)

Mit  $L J_0 = 2$  erhält man die *maximale Stromstärke*:

$$I_{\text{Grenz}} = 6 \cdot 10^{-5} \frac{T_-^{3/2}}{\lambda_- G} \dots [\text{A}], \quad (4,14)$$

bei welcher *Bogenunterbrechung infolge Selbstabschaltung* eintritt.

Da  $\lambda_- = \lambda_{-0}/p$ , ergibt sich für steigenden Druck eine insgesamt steigende Tendenz auch für  $I_{\text{Grenz}}$ , obwohl  $T_-$  mit steigendem Druck  $p$  abnimmt:

$$I_{\text{Grenz}} \sim p.$$

Ein Vergleich dieser errechneten Grenzstromstärke (4,14) mit beobachteten Werten, wie sie etwa A. W. Hull<sup>14</sup> zusammengestellt hat, war leider nicht durchführbar, da dort keine Angaben über  $G$  und  $U_-$  mitgeteilt sind.